

This is file www.math.uni-augsburg.de/pukelsheim/2000a.html

DO NOT RELY ON THIS FILE WHICH IS TRANSITIONAL. IF YOU WANT TO MAKE SERIOUS USE OF THIS MATERIAL,
CONSULT THE PRINTVERSION IN
Allgemeines Statistisches Archiv 84 (2000) 447-459

Mandatszuteilungen bei Verhältniswahlen: Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen

Von Friedrich Pukelsheim *

Zusammenfassung: Der Grundsatz der gleichen Wahl wird vom Bundesverfassungsgericht für Verhältniswahlen so präzisiert, dass die Erfolgswerte der Wählerstimmen so gleich wie möglich ausfallen sollen. In der vorliegenden Note wird diese Zielsetzung operational umgesetzt. Maßzahl für den Erfolgswert einer für eine Partei abgegebenen Wählerstimme ist der Quotient aus Mandatsanteil und Stimmenanteil dieser Partei. Um die Erfolgswerte der Wählerstimmen zu vergleichen, werden zwei Wege vorgeschlagen. Der erste beruht auf dem Unterschied der Erfolgswerte je zweier Wählerstimmen untereinander, der zweite summiert die Abweichungsquadrate aller Erfolgswerte vom idealen Erfolgswert. Werden diese Maßzahlen so klein wie möglich gemacht, so führen beide Wege zu der Divisormethode mit Standardrundung, die mit den Namen von *Daniel Webster*, *André Sainte-Laguë* und *Hans Schepers* verbunden ist.

Summary: The German Federal Constitutional Court interpretes the constitutional principle of equal election so as to demand an equal success ratio for each vote. In this paper we propose an operational approach to achieve this goal. The success ratio of a vote cast for a certain party is the quotient of the proportion of seats and the proportion of votes for this party. We consider two ways of measuring inequality among the success ratios. The first is a pairwise test, based on the disparity between the success ratios of any two votes. The second sums over the squared deviations of each success ratio from the ideal success ratio. Either way inequality is minimized by a unique apportionment method, the divisor method with standard rounding that is associated with the names of *Daniel Webster*, *André Sainte-Laguë*, and *Hans Schepers*.

1. Einleitung

Der Deutsche Bundestag hat in seiner 58. Sitzung am 30. September 1999 mit den Stimmen des ganzen Hauses die Beschlussempfehlung des Wahlprüfungsausschusses angenommen. Unter anderen wird die Bundesregierung gebeten zu prüfen, ob die derzeit gültige Mandatszuteilungsmethode von Hare/Niemeyer durch die Methode von Sainte-Laguë/Schepers ersetzt werden soll. Diese Prüfungsbitte, die auch vom Bundeswahlleiter unterstützt wird, erwuchs aus der Behandlung der Einsprüche gegen die Wahl zum 14. Deutschen Bundestag. Mehrfach wurde dabei auf paradoxe Unzulänglichkeiten der Methode von Hare/Niemeyer verwiesen und betont, dass diese bei der Methode von Sainte-Laguë/Schepers nicht auftreten. Die Zuteilungsmethode von Sainte-Laguë/Schepers wird vom Bundestag für seine interne Arbeit verwendet, das heißt für die Besetzung der Bundestagsausschüsse und für die Vergabe der Ausschussvorsitze im Verhältnis der Fraktionsstärken. Um den in den Wahleinsprüchen vorgetragenen Einwendungen zu begegnen, liegt daher die Frage nahe, ob die Methode von Sainte-Laguë/Schepers nicht nur für die interne Bundestagsarbeit die bessere ist, sondern auch für die eigentliche Wahl zum Bundestag selber.

Dazu sollen hier einige Argumente zusammengetragen werden, warum die Methode von Sainte-Laguë/Schepers für die Zwecke des Bundeswahlgesetzes in der Tat als «die beste» Zuteilungsmethode gelten kann. Nun ist einem solchen Anspruch, «die beste» Methode zu sein, mit größter Zurückhaltung zu begegnen. Denn es gibt keine absoluten Maßstäbe dafür, was eine Mandatszuteilungsmethode als «gut», «beste», «gerecht» oder «gleich» auszeichnet. Alle Gütekriterien sind relativ und müssen aus Sicht der vorgegebenen verfassungsrechtlichen Normen bewertet werden. Das Bundesverfassungsgericht deutet den Grundsatz der gleichen Wahl für das Bundeswahlgesetz so aus, dass die Erfolgswerte der Wählerstimmen so gleich wie möglich ausfallen sollen. Die Methode von Sainte-Laguë/Schepers erweist sich als erfolgswertoptimal in dem Sinn, dass sie der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen näher kommt als jede andere Mandatszuteilungsmethode.

Für die Mandatszuteilung am Ende der Wahl sind nur die zuteilungsberechtigten Stimmen ausschlaggebend. Bei einer Bundestagswahl ist eine Zweitstimme zuteilungsberechtigt, falls sie gültig ist und für eine Partei abgegeben wird, die mindestens fünf Prozent der gültigen Zweitstimmen erhält (Fünfprozentklausel) oder mindestens drei Direktmandate erringt (Grundmandatsklausel) oder eine nationale Minderheit vertritt (Minderheitenprivileg). Für die l Parteien, die an der Mandatszuteilung partizipieren, bezeichnen wir die auf Partei i entfallende Zweitstimmen mit v_i (Voten). Die Summe aller zuteilungsberechtigten Stimmen sei $V = v_1 + \dots + v_l$. Für die zu vergebenden $M = 656$ Bundestagsmandate legt die Mandatszuteilungsmethode fest, wieviele Mandate m_i der Partei i zugeteilt werden.

2. Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers)

Die Erfolgswertoptimalität der Methode von Sainte-Laguë/Schepers werden wir ausschließlich auf die Zuteilungsergebnisse gründen, die sie liefert. Der Rechenweg, wie das Ergebnis gefunden wird, ist unerheblich. Zudem gibt es für die Methode von Sainte-Laguë/Schepers nicht nur einen einzigen, eindeutig bestimmten Rechenweg, sondern gängig sind derer zumindest drei: (1) eine Tabelle von Höchstzahlen, die auf der Teilerfolge 1, 3, 5, ... beruhen; (2) eine Tabelle von Rangmaßzahlen, wie sie der Deutsche Bundestag verwendet; (3) ein zweistufiges Rechenverfahren, wobei die erste Stufe nahe an das Zuteilungsergebnis hinspringt und die zweite Stufe etwaige verbleibende Diskrepanzen beseitigt. Ob ein Rechenweg dem anderen überlegen ist, ist unwichtig; das Ergebnis bleibt dasselbe. Dagegen ist wichtig, ob ein vorgelegtes oder von den Medien verbreitetes Zuteilungsergebnis auf einfache Art überprüft werden kann. [\[Anm. 1\]](#)

Die Proberechnung für die Methode von Sainte-Laguë/Schepers gerät dann extrem einfach, wenn mit dem Zuteilungsergebnis gleichzeitig als Hilfsgröße ein passender Divisor d zitiert wird. Um für Partei i die Mandatszahl m_i zu bestätigen, wird die Stimmenzahl v_i durch den zitierten Divisor d geteilt und der so erhaltenen Quotienten v_i / d standardmäßig gerundet: Beträgt der nach dem Dezimalpunkt auftretende Rest mehr als die Hälfte, wird aufgerundet; beträgt er weniger als die Hälfte, wird abgerundet. Die Proberechnung reduziert sich also auf die Regel: *Teile und runde!* Wir halten es für wichtig, auf den Vorteil dieser denkbar einfachen Proberechnung sichtbar hinzuweisen, und bevorzugen deshalb die Bezeichnung «Divisormethode mit Standardrundung».

Die Namen, mit denen die Methode verbunden wird, deuten auf ihre Wurzeln hin. *M.L. Balinski* und *H.P. Young*, die 1982 mit ihrer Monographie *Fair Representation* die Untersuchungen der strukturellen Eigenschaften von Mandatzuteilungsmethoden entscheidend vorangebracht haben, weisen nach, dass die Methode schon 1832 von *Daniel Webster* vorgeschlagen wurde. *André Sainte-Laguë* bewies 1910, dass sie die Summe der Abweichungsquadrate zwischen den realisierten Erfolgswerten und dem idealen Erfolgswert minimiert. *Ladislaus von Bortkiewicz* zeigte 1919, dass die Methode den Unterschied der Erfolgswerte je zweier Wählerstimmen so klein wie möglich macht. *Hans Schepers* unterbreitete die Methode 1980 dem Bundestag als Alternative, die die Paradoxien der Methode von Hare/Niemeyer vermeidet. Die Vorgeschichte kann die Methode aber nicht eigentlich rechtfertigen. Ausschlaggebend ist, wie sie im Licht der verfassungsrechtlichen Bestimmungen dasteht, die hier und heute gelten. [\[Anm. 2\]](#)

3. Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen

Die Gütekriterien, mit denen Mandatzuteilungsmethoden zu bewerten sind, leiten sich aus den allgemeinen Wahlgrundsätzen ab, die die Verfassung vorgibt. Artikel 38 des Grundgesetzes legt fest, dass die Abgeordneten des Deutschen Bundestages in «allgemeiner, unmittelbarer, freier, gleicher und geheimer Wahl» gewählt werden. Davon ist der Grundsatz der gleichen Wahl derjenige, der für die Beurteilung von Mandatzuteilungsmethoden bestimmend ist. Das Bundesverfassungsgericht entfaltet diesen Grundsatz zuvorderst zur Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen. Bezugsgesamtheit sind die Wähler, nicht die Wahlbewerber und nicht die Parteien. In einer seiner ersten Wahlrechtsentscheidungen definiert das Gericht 1952 die Erfolgswertgleichheit mit dem Satz: «...; alle Wähler sollen mit der Stimme, die sie abgeben, den gleichen Einfluß auf das Wahlergebnis haben.» [\[Anm. 3\]](#)

Die v_i Wählerstimmen, die auf Partei i entfallen, führen zu einem Erfolg von m_i Mandaten. Da alle Stimmen gleichen Zählwert haben, verteilt sich der Erfolg von m_i Mandaten in gleicher Weise auf die v_i Stimmen. Eine einzelne Stimme hat also mit dem Bruchteil m_i / v_i am Erfolg teil. Noch fehlt aber der Bezug auf die Gesamtheit aller Mandate und die Gesamtheit aller Stimmen. Denn ob die m_i Mandate einen großen oder einen kleinen Erfolg bedeuten, wird erst im Licht der Gesamtzahl M aller Mandate sichtbar. Beispielsweise sind 30 Sitze eine absolute Mehrheit in einem Ausschuss von 50 Mitgliedern und eine kleine Minderheit in einem Plenum von 600 Mandaten. Ebenso ist das Gewicht von v_i Wählerstimmen nur zu ermitteln, wenn die Zahl V aller Stimmen mitbedacht wird. Wir definieren daher den *Erfolgswert einer für die Partei i abgegebenen Wählerstimme* als den Quotienten von Mandatsanteil und Stimmenanteil:

$$(m_i / M) / (v_i / V)$$

Erhält man als Erfolgswert einer für die Partei i abgegebenen Wählerstimme den Wert 1, so stimmen Mandatsanteil m_i

$/M$ und Stimmenanteil v_i/V exakt überein und die Zuteilung trifft genau das Ideal, das die Proporzrechnung anstrebt. Der ganze, hundertprozentige Erfolg, der im Idealfall einer Wählerstimme zukommen sollte, wird also durch den *idealen Erfolgswert* 1 gemessen. Aller Erfahrung nach werden die Erfolgswerte der Wählerstimmen vom idealen Erfolgswert 1 geringfügig abweichen. Liegt der realisierte Erfolgswert knapp unter dem idealen Erfolgswert 1, dann wird ein ganzer Erfolg um ein Weniges verfehlt; liegt er knapp darüber, wird ein ganzer Erfolg um ein Weniges übertroffen.

Es gilt nun, auf diese Erfolgswerte den Grundsatz der gleichen Wahl anzuwenden. Dieser Grundsatz kann nicht die Anwesenheit makelloser Gleichheit erzwingen, sondern ruft nach der Abwesenheit vermeidbarer Ungleichheit. Die Frage lautet also, ob das Zuteilungsergebnis so ausfällt, dass die Erfolgswerte der Wählerstimmen so wenig ungleich sind wie möglich. Die Antwort hängt davon ab, mit welchem Abweichungsmaß die Ungleichheiten bewertet werden. Zwei Zugänge seien im Folgenden hervorgehoben. Der erste zielt auf den paarweisen Vergleiche je zweier Erfolgswerte (Abschnitt 4), der zweite vergleicht alle Erfolgswerte mit dem idealen Erfolgswert 1 (Abschnitt 5). Obwohl diese beiden Zugänge grundverschieden sind, zeichnen sie dieselbe Zuteilungsmethode aus, nämlich die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers).

4. Vergleich der Erfolgswerte je zweier Wählerstimmen untereinander

Ist eine Partei mit dem Zuteilungsergebnis nicht zufrieden und will ein Mandat mehr haben, so muß dieses Mandat einer anderen Partei weggenommen werden. In einer Verteilungsrechnung muß deshalb die Verbesserung an einer Stelle aufgerechnet werden gegen die notwendig damit einhergehende Verschlechterung an anderer Stelle. Es braucht also *mindestens zwei Beteiligte*, um einen Vergleich der Erfolgswerte zu bewerkstelligen. Ein ausschließlich auf paarweisen Vergleichen beruhendes Abweichungsmaß nennen wir *lokal*, da nur jeweils zwei der beteiligten Parteien miteinander verglichen werden. Allerdings sind viele—nämlich alle möglichen—paarweise Vergleiche durchzuführen. Zum Beispiel sind in der Bundestagswahl 1998 bei sechs im Parlament vertretenen Parteien insgesamt 15 paarweise Vergleiche nötig.

Betrachten wir nun eine spezielle Paarung und vergleichen den Erfolgswert einer für die Partei i abgegebenen Wählerstimme mit dem Erfolgswert einer für eine andere Partei j abgegebenen Wählerstimme. Als *Unterschied* $U(i,j)$ der Erfolgswerte der beiden Wählerstimmen nehmen wir die betragsmäßige Differenz her:

$$U(i,j) = |(m_i/M) / (v_i/V) - (m_j/M) / (v_j/V)|$$

In ihrer Gesamtheit bilden alle möglichen paarweisen Unterschiede ein lokales Ungleichheitsmaß, das mit dem Grundsatz der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen bestens harmonisiert. Wenn ein einziger dieser Unterschiede $U(i,j)$ dadurch verkleinert werden kann, dass ein Mandat zwischen den Parteien i und j transferiert wird, dann sollte dieser Transfer stattfinden. Dann nämlich ist die bestehende Ungleichheit in ihrem Ausmaß vermeidbar und die aus dem Transfer resultierende Zuteilung kommt der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen näher. Eine Mandatzuteilung, bei der keiner der vielen möglichen paarweisen Unterschiede durch einen Transfer verkleinert werden kann, macht die Ungleichheit der Erfolgswerte zwischen je zwei Wählerstimmen so klein wie möglich. Solche Zuteilungen liefert die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers). [Anm. 4]

Abweichend von den absoluten Unterschieden $U(i,j)$ könnte man die *relativen Unterschiede bezogen auf den kleineren der beiden Erfolgswerte* zugrunde legen. Dann erweist sich eine andere Zuteilungsmethode als optimal, nämlich die Divisormethode mit geometrischer Rundung (Hill/Huntington), die seit 1941 für die Zuteilung der 435 Sitze des US-Repräsentantenhauses an die 50 US-Bundesstaaten verwendet wird. Im deutschen Wahlsystem dürfte die Relativierung der Erfolgswertunterschiede durch den Bezug auf den kleineren der beiden Erfolgswerte keinen Bestand haben. Dadurch wird nämlich eine für eine große Partei abgegebene Wählerstimme bei einem Vergleich mit einer für eine mittlere Partei abgegebenen Wählerstimme anders gewichtet als bei einem Vergleich mit einer für eine kleine Partei abgegebenen Wählerstimme. Eine solche variierende Gewichtung widerspricht der Zählwertgleichheit der Wählerstimmen, die das Bundesverfassungsgericht ebenfalls aus dem Grundsatz der gleichen Wahl herleitet. Die relativen Unterschiede werden im deutschen Wahlsystem dem Grundsatz der gleichen Wahl nicht gerecht.

5. Vergleich der Erfolgswerte aller Wählerstimmen mit dem idealen Erfolgswert

Eine andere Kennzahl zur Messung der Ungleichheit der Erfolgswerte bezieht die Erfolgswerte *aller* Wählerstimmen auf den gemeinsamen, idealen Erfolgswert 1. Dieses Kriterium ist einerseits einfacher, weil es nur einen Wert liefert und nicht etwa 15. Andererseits ist der Rechenaufwand größer, weil gleichzeitig alle Wählerstimmen zu berücksichtigen sind. Wir sprechen deshalb von einem globalen, summarischen Kriterium, im Gegensatz zu den

lokalen, paarweisen Vergleichen des vorangehenden Abschnittes 4.

Für eine auf Partei i entfallende Wählerstimme messen wir die Abweichung des realisierten vom idealen Erfolgswert durch das Quadrat

$$[(m_i/M)/(v_i/V) - 1]^2$$

Dieses Abweichungsquadrat tritt für jede Wählerstimme auf, die für Partei i abgegeben wird, also v_i -mal. Schließlich summieren wir über alle Parteien:

$$v_1 [(m_1/M)/(v_1/V) - 1]^2 + \dots + v_l [(m_l/M)/(v_l/V) - 1]^2$$

Die so erhaltene *Summe der Abweichungsquadrate* bildet ein globales Maß für Ungleichheit, das mit dem Grundsatz der Erfolgswertgleichheit bestens harmoniert. Wenn durch Übergang zu einer anderen Zuteilung die Summe der Abweichungsquadrate verkleinert werden kann, dann sollte das geschehen. Denn dann ist die bestehende Ungleichheit vermeidbar und die neue Zuteilung kommt der Erfolgswertgleichheit näher. Eben dies leistet die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers). [\[Anm. 5\]](#)

Das vorstehende Ungleichheitsmaß bewertet den Gleichheitsanspruch der Wahlbürger nicht individuell, sondern vielmehr in der Summe der Ansprüche aller Wahlbürger im Blick auf den gleichheitsverwirklichenden Idealwert 1. Sowohl diese Gesamtschau als auch der Bezug auf einen Idealwert führt zu einem höheren Abstraktionsniveau neben den eher handfesten, paarweisen Vergleichen in Abschnitt 4. Es ist in der Tat verwunderlich, dass die zwei verschiedenen Abweichungsmaße nicht zwei verschiedene Zuteilungsmethoden begründen, sondern ein- und dieselbe, nämlich die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers). Man mag darin eine Bestätigung sehen, dass die Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen einen Wahlgrundsatz darstellt, der für Verhältniswahlsysteme überaus natürlich und angemessen ist.

Anders als mit dem Quadrat könnte man die Abweichung zum idealen Erfolgswert 1 stattdessen mit dem Betrag

$$|(m_i/M)/(v_i/V) - 1|$$

messen. Für die v_i Wähler der Partei i beträgt die Abweichung zusammen

$$v_i |(m_i/M)/(v_i/V) - 1| = (V/M) |m_i - (v_i/V) M|$$

Bis auf den gemeinsamen Faktor V/M , den wir weglassen, erhalten wir insgesamt

$$|m_1 - (v_1/V) M| + \dots + |m_l - (v_l/V) M|$$

Es verbleiben l Summanden, für jede Partei einer, und der Bezug auf die V Wähler geht verloren. Daher ist die Summe der Abweichungsbeträge eine Maßzahl für den Gesamtfehler, der an den l Parteien begangen wird. Denn für Partei i wird die Mandatszahl m_i verglichen mit den $(v_i/V) M$ Mandatsbruchteilen, die dem Stimmenanteil v_i/V entsprechen. Wir nennen die $(v_i/V) M$ Mandatsbruchteile den *Idealanspruch der Partei i* . Die Summe der Abweichungsbeträge ist ein globales Maß dafür, ob die Mandatszahlen der Parteien den Idealansprüchen nahekommen. Dieses Abweichungsmaß wird minimiert von der derzeit gesetzlichen Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare/Niemeyer).

Soweit die Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen und die Befriedigung der Idealansprüche der Parteien miteinander konkurrierenden, dürfte wohl die Erfolgswertgleichheit den Vorrang erhalten. Demokratischer Souverän sind die Wähler, nicht die Parteien. Der Grundsatz der gleichen Wahl erfordert vorrangig, dass die Wähler mit gleichem Erfolg an der Wahl teilnehmen können. Der Anspruch auf (Chancen-)Gleichheit bei der Wahl, den Wahlbewerber und Parteien geltend machen, ist nachrangig.

Ob man die Abweichung zwischen realisierten und idealen Erfolgswerten mit Quadraten oder mit Beträgen mißt, hat noch eine andere Konsequenz. Ein sachgerechtes Ungleichheitsmaß sollte umso kleinere Kennzahlen liefern, je weniger ungleich ein Zuteilungsergebnis ausfällt im Vergleich zu einem anderen. Diesem Zweck wird die Summe der Quadrate weitaus besser gerecht als die Summe der Beträge, «indem man sich gewiss lieber den einfachen Fehler zweimal, als den doppelten einmal gefallen läßt.» [\[Anm. 6\]](#) Es sollte also ein geringeres Gewicht haben, wenn zwei

Parteien je ein Mandat zuviel bekommen, als wenn eine Partei zwei Mandate zuviel hat. Wir werden anhand des Ergebnisses der letzten Bundestagswahl illustrieren, dass die Summe der Abweichungsbeträge solchen Konstellationen blind gegenübersteht, während die Summe der Abweichungsquadrate so differenziert, wie es wünschenswert erscheint.

6. Beispiel: Die Bundestagswahl 1998

Wir veranschaulichen die allgemeinen Ausführungen mit den Ergebnissen der Wahl zum 14. Deutschen Bundestag am 27. September 1998; siehe Tabelle 1. Die Zahl der zuteilungsberechtigten Stimme betrug $V = 46\,408\,690$, die Gesamtzahl der Mandate $M = 656$; die Überhangmandatsproblematik lassen wir unbeachtet. Neben den Stimmen- und Mandatszahlen geben wir die Stimmen- und Mandatsanteile an, gerundet auf Zehntelprozent. In den Zeilen «S-L/Sch» sind die Zuteilungsergebnisse nach der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) notiert, in den Zeilen «H/N» die der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare/Niemeyer).

Tabelle 1: Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) [S-L/Sch] und Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare/Niemeyer) [H/N], Wahl zum 14. Deutschen Bundestag am 27. September 1998

	SPD	%	CDU/CSU	%	Grüne	%	FDP	%	PDS	%
<i>Oberzuteilung von 656 Mandaten an die Parteien (Divisor für S-L/Sch 70 840)</i>										
Zweitstimmen	20 181 269	43.5	14 004 908	30.2	3 301 624	7.1	3 080 955	6.6	2 515 454	5.4
			/ 3 324 480	7.2						
S-L/Sch = H/N	285	43.4	198	30.2	47	7.2	43	6.5	36	5.5
			/ 47	7.2						
<i>Untorzuteilungen an die Landeslisten der sechs Parteien</i>										
<i>Divisor für S-L/Sch</i>	<i>70 840</i>		<i>70 840</i>		<i>71 340</i>		<i>70 340</i>		<i>70 840</i>	
Schleswig-Holstein	788 907	3.9	620 516	4.4	112 287	3.4	131 611	4.3	25 470	1.0
S-L/Sch = H/N	11	3.9	9	4.6	2	4.3	2	4.7	0	0.0
Hamburg	445 276	2.2	291 756	2.1	104 658	3.2	62 835	2.0	22 603	0.9
S-L/Sch = H/N	[1 Ü]	6 2.1	4	2.0	1	2.1	1	2.3	0	0.0
Niedersachsen	2 446 945	12.1	1 689 953	12.1	292 799	8.9	314 503	10.2	50 068	2.0
S-L/Sch = H/N	35	12.3	24	12.1	4	8.5	4	9.3	1	2.8
Bremen	201 539	1.0	102 115	0.7	45 303	1.4	23 809	0.8	9 815	0.4
S-L/Sch = H/N	3	1.1	1	0.5	1	2.1	0	0.0	0	0.0
Nordrhein-Westfalen	5 097 425	25.3	3 669 024	26.2	745 911	22.6	789 745	25.6	131 550	5.2
S-L/Sch	72	25.2	52	26.3	10	21.3	11	25.6	2	5.5
H/N					11	23.4				
Hessen	1 481 898	7.3	1 238 158	8.8	293 939	8.9	279 988	9.1	52 216	2.1
S-L/Sch = H/N	21	7.4	17	8.6	4	8.5	4	9.3	1	2.8
Rheinland-Pfalz	1 028 886	5.1	975 258	7.0	152 009	4.5	177 016	5.7	25 083	1.0
S-L/Sch = H/N	15	5.3	14	7.1	2	4.3	3	7.0	0	0.0
Baden-Württemberg	2 118 439	10.5	2 245 873	16.0	549 567	16.6	524 527	17.0	58 013	2.3
S-L/Sch = H/N	30	10.5	32	16.2	8	17.0	7	16.3	1	2.8
Bayern	2 401 021	11.9	/ 3 324 480	CSU	413 909	12.5	354 620	11.5	46 301	1.8
S-L/Sch = H/N	34	11.9	/ 47	CSU	6	12.8	5	11.6	1	2.8
Saarland	361 486	1.8	219 484	1.6	37 807	1.1	32 517	1.1	7 087	0.3
S-L/Sch	5	1.8	3	1.5	1	2.1	0	0.0	0	0.0
H/N					0	0.0				
Berlin	740 915	3.7	463 438	3.3	221 849	6.7	95 403	3.1	263 337	10.5
S-L/Sch = H/N	10	3.5	7	3.5	3	6.4	1	2.3	4	11.1
Mecklenbg.-Vorpommern	384 746	1.9	318 939	2.3	32 132	1.0	24 300	0.8	257 464	10.2
S-L/Sch	[2 Ü]	5 1.8	5	2.5	0	0.0	0	0.0	4	11.1
H/N			4	2.0						

Brandenburg	670 744	3.3	320 443	2.3	55 884	1.7	43 896	1.4	313 090	12.5
S-L/Sch = H/N	[3 Ü]	9 3.1	5 2.5		1 2.1		1 2.3		4 11.1	
Sachsen-Anhalt	620 771	3.1	444 311	3.2	54 538	1.7	66 428	2.2	337 393	13.4
S-L/Sch = H/N	[4 Ü]	9 3.1	6 3.0		1 2.1		1 2.3		5 13.9	
Thüringen	549 942	2.7	460 441	3.3	62 068	1.9	54 233	1.8	338 200	13.4
S-L/Sch	[3 Ü]	8 2.8	6 3.0		1 2.1		1 2.3		5 13.9	
H/N			7 3.5							
Sachsen	842 329	4.2	945 199	6.7	126 964	3.8	105 524	3.4	577 764	23.0
S-L/Sch = H/N		12 4.2	13 6.6		2 4.3		2 4.7		8 22.2	

Gesamtmandate, einschließlich 13 Überhangsmandate [Ü]

298 44.6	198 29.6	47 7.0	43 6.4	36 5.4
	/ 47 7.0			

Betrachten wir zunächst die Oberzuteilung an die Parteien, bei der beide Zuteilungsmethoden dasselbe Ergebnis liefern. Mit dem zitierten Divisor $d = 70\,840$ läßt es sich einfach überprüfen. Zum Beispiel werden bei der vorletzten Partei $3\,080\,955 / 70\,840 = 43.49$ Mandatsteile zu 43 Mandaten abgerundet, weil der Rest 0.49 unter einem Halben bleibt. Bei der letzten Partei erhält man $2\,515\,454 / 70\,840 = 35.51$ und es wird auf 36 Mandate aufgerundet, weil der Rest 0.51 größer ist als ein Halbes. Jede andere Zahl im Intervall von 70 826.6 bis 70 857.8 kann ebenfalls als Divisor dienen und führt zwar nicht zu denselben Quotienten, wohl aber zu denselben Rundungsergebnissen. Die Erfolgswerte einer für die Partei 1, ..., 6 abgegebenen Wählerstimme ergeben sich zu 0.99906, 1.00019, 1.00016, 1.00708, 0.98737 und 1.01247. Die erste Partei und die fünfte Partei bleiben knapp unter dem idealen Erfolgswert 1 (um -0.1 bzw. -1.3 Prozent), die anderen liegen knapp darüber. Die zweite und dritte Partei realisieren den idealen Erfolgswert 1 bis auf Bruchteile eines Promills.

Im Sinn der in Abschnitt 4 herausgestellten Optimalität der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) kann keiner der 15 paarweisen Erfolgswertunterschiede dadurch verkleinert werden, dass ein Mandat zwischen zwei Parteien transferiert wird. Zum Beispiel erhalten wir für den Erfolgswertunterschied einer Wählerstimmen für die erste Partei und einer Wählerstimme für die sechste Partei den Wert $|0.999 - 1.012| = 0.013$. Der Erfolgswert einer Wählerstimme für die erste Partei ist kleiner als der Erfolgswert einer Wählerstimme für die sechste Partei; der Transfer eines Mandats von der sechsten zur ersten Partei kehrt diesen Vorteil zwar um, aber der Unterschied zwischen den Erfolgswerten wächst auf 0.018, das heißt um den Faktor 1.36:

$$|(286 / 656) / (20\,181\,269 / 46\,408\,690) - (35 / 656) / (2\,515\,454 / 46\,408\,690)| = |1.002 - 0.984| = 0.018$$

Gleichzeitig ist die Summe der Abweichungsquadrate vom idealen Erfolgswert 1 so klein wie nur möglich. Für das Zuteilungsergebnis nach der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) beträgt sie 1066.8. Der Transfer eines Mandats von der sechsten zur ersten Partei vergrößert diesen Wert um den Faktor 1.32 auf 1407.4.

In Abschnitt 5 haben wir zur Messung der Abweichung vom idealen Erfolgswert 1 ausgeführt, dass die Summe der Quadrate etwaige Ungleichheiten feinfühlicher offenlegt als die Summe der Beträge. Zur Illustration transferieren wir vier Mandate der Partei 1 an die Parteien 3 und 4. Die fünf möglichen Transfers werden von der Summe der Quadrate in der Bewertung so unterschieden, wie man sich das wünscht:

Transfer	Partei 3 (3 324 480 Zweitst.)	Partei 4 (3 301 624 Zweitst.)	Summe der Quadrate	Summe der Beträge
(1)	47 + 4	47 + 0	29 744.3	9.636
(2)	47 + 3	47 + 1	21 701.7	9.636
(3)	47 + 2	47 + 2	19 701.7	9.636
(4)	47 + 1	47 + 3	23 744.3	9.636
(5)	47 + 0	47 + 4	33 829.7	9.636

Transfer (1) gibt alle vier Mandate an Partei 3, Transfer (5) gibt sie an Partei 4. Die Summe der Abweichungsquadrate weist Transfer (1) mit 29 744.3 als weniger ungleich aus als Transfer (5) mit 33 829.7. Dies ist angemessen, weil Partei 3 mehr Stimmen auf sich vereinigt hat als Partei 4. Für Transfer (3) wird mit Kennzahl 19 701.7 die geringste

Ungleichheit gemessen. Dies überzeugt, da die Stimmenzahlen der beiden Parteien ungefähr gleich sind und Transfer (3) die beiden Parteien gleich behandelt. Dagegen steht die konstante Summe der Beträge solchen Feinheiten blind gegenüber.

Für die sechs Unterteilungen an die Landeslisten der Parteien ist Tabelle 1 spaltenweise zu lesen. Als Beispiel kommentieren wir die Unterteilung der 47 Mandate von Bündnis 90/Die Grünen an die 16 Landeslisten. Für die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) kann jede Zahl im Intervall von 71 039.2 bis 73 275.6 als Divisor dienen; der zitierte Divisor 71 340 erlaubt einen besonders schönen Vergleich mit den zitierten Divisoren für die Oberzuteilung und für die anderen Unterteilungen. Die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare/Niemeyer) liefert dasselbe Zuteilungsergebnis, außer dass ein Mandat vom Saarland nach Nordrhein-Westfalen transferiert wird. Für diesen Transfer ergeben sich folgende Kennzahlen. Zehn Mandate für Nordrhein-Westfalen bedeuten, dass eine dort abgegebene Wählerstimme den Erfolgswert $(10 / 47) / (745\,911 / 3\,301\,624) = 0.942$ erzielt und damit den idealen Erfolgswert 1 um $94.2 - 100 = -5.8$ Prozent verfehlt. Die Zuteilung eines elften Mandats würde die Landesliste natürlich besserstellen. Aber die Sicht nur eines einzelnen Beteiligten reicht nicht aus, um die Auswirkungen eines Mandatstransfer in der gesamten Verteilungsrechnung zu beurteilen. Die erzielte Verbesserung muß aufgerechnet werden gegen die Verschlechterung, die andernorts durch die Wegnahme des Mandats verursacht wird.

Für die Zuteilung mit der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) beträgt der Erfolgswertunterschied zwischen je einer Wählerstimme in Nordrhein-Westfalen und im Saarland $|(10 / 47) / (745\,911 / 3\,301\,624) - (1 / 47) / (37\,807 / 3\,301\,624)| = 0.916$. Im Zuteilungsergebnis der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare/Niemeyer) wächst der Erfolgswertunterschied auf $|(11 / 47) / (745\,911 / 3\,301\,624) - (0 / 47) / (37\,807 / 3\,301\,624)| = 1.036$, um den Faktor 1.13. Bei 16 Landeslisten gibt es 120 Möglichkeiten, ein Mandat von einer Landesliste zu einer anderen zu transferieren. Jedesmal fällt der Erfolgswertunterschied für die Zuteilung gemäß der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) so klein wie möglich aus und wird durch einen Mandatstransfer nicht noch kleiner, sondern größer. Für die gesamte Unterteilung an die Landeslisten von Bündnis 90/Die Grünen ist die Summe der Abweichungsquadrate für die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) 108 262.1, für die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare/Niemeyer) 116 667.7.

Die zitierten Divisoren lassen sich so interpretieren, dass für jedes volle Ausschöpfen des Divisors ein Mandat zugeteilt wird; die verbleibenden Reststimmen bringen ein Mandat nur dann, wenn sie die Hälfte des Divisors überschreiten. Zwar ist die Interpretation des Divisors als «ungefähre Stimmenzahl pro Mandat» einprägsam, sie darf aber nicht verwechselt werden mit dem Ziel, die Vertretungsgewichte der Mandate so gleich wie möglich zu machen. Gleiche Erfolgswerte der Wählerstimmen, gleiche Vertretungsgewichte der Mandate und gleiche Befriedigung der Idealansprüche der Parteien sind drei Ausdeutungen des Grundsatzes der gleichen Wahl, die trotz aller Gemeinsamkeiten in ihrer Verschiedenheit miteinander konkurrieren. Bestimmend ist die Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen, und damit harmonisiert die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë/Schepers) besser als jede andere Zuteilungsmethode. [Anm. 7]

Friedrich Pukelsheim
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
D-86135 Augsburg
Pukelsheim@Math.Uni-Augsburg.De

Ersteinreichung 18.02.2000 / Revision 14.03.2000

* Ich danke Professor Norman R. Draper, University of Wisconsin-Madison, für wertvolle Diskussionen zum vorliegenden Thema; die Zusammenarbeit wurde durch einen Max-Planck-Forschungspreis gefördert.

Anmerkung 1. Zu (1) siehe etwa H. Rühle: D'Hondt–Sainte-Laguë statt D'Hondt-original: Ein Beitrag zur Wahl- und Chancengleichheit für Bürger und Parteien. *Zeitschrift für Parlamentsfragen* 9 405-414, 1978. Zu (2) S. 710 in P. Schindler: *Datenhandbuch zur Geschichte des Deutschen Bundestages 1983 bis 1991*. Baden-Baden, 1994. Zu (3) M. Happacher/F. Pukelsheim: And Round the World Away. In: *Proceedings of the Conference in Honor of Shayle R. Searle, Ithaca 1996* (Biometrics Unit, ed.), 93-108, Cornell University, Ithaca NY, 1998; G. Dorfleitner/T. Klein: Rounding with multiplier methods: An efficient algorithm and applications in statistics. *Statistical Papers* 40 143-157, 1999.

Anmerkung 2. Daniel Webster (*1782, +1852), US-amerikanischer Politiker. André Sainte-Laguë [sāt la'gy] (*1882, +1950), Professor für Mathématiques générales en vue des applications am Conservatoire national des arts et métiers in Paris. Ladislaus von Bortkiewicz (*1868, +1931), Professor an der Universität Berlin und Direktor des Staatswissenschaftlich-Statistischen Seminars. Hans Schepers (*1928), Leiter der Gruppe Datenverarbeitung der Wissenschaftlichen Dienste des Deutschen Bundestages.

Anmerkung 3. BVerfGE 1, 208 [246].—Dasselbe Ziel mit derselben Intention formuliert schon A. Sainte-Laguë: «Pour que l'égalité des bulletins de vote soit aussi complète que possible, chacun des électeurs doit avoir la même part d'influence.» [S. 377 des Abstrakts von «La Représentation proportionnelle et la Méthode des moindres Carrés». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **27** 529-542, 1910; Abstrakt in: *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **151** 377-378, 1910; Übersetzung des Abstrakts als Appendix 2 in A. Lijphart/R.W. Gibberd: Thresholds and payoffs in list systems of proportional representation. *European Journal of Political Research* **5** 219-244, 1977.] Oder ein knappes Jahrzehnt später fast wortgleich G. Pólya: «Das Prinzip des gleichen Wahlrechts fordert die möglichst gleichmäßige Berücksichtigung der Wünsche aller Wähler, aber nicht der Parteien, als solcher.» [S. 308 in «Proportionalwahl und Wahrscheinlichkeitsrechnung». *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* **74** 297-322, 1919.]

Anmerkung 4. S. 608 in L.v. Borkiewicz: Ergebnisse verschiedener Verteilungssysteme bei der Verhältniswahl. *Annalen für soziale Politik und Gesetzgebung* **6** 592-613, 1919; S. 101 in M.L. Balinski und H.P. Young: *Fair Representation—Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. New Haven CT, 1982.

Anmerkung 5. S. 532 in A. Sainte-Laguë, a.a.O.; S. 962 in F.W. Owens: On the apportionment of representatives. *Journal of the American Statistical Association* **17** 958-968, 1921; S. 103 in M.L. Balinski und H.P. Young, a.a.O.; S. 128 in K. Kopfermann: *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren*. Mannheim, 1992.

Anmerkung 6. S. 323 in C.F. Gauss: Anzeige: Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxia, pars prior. *Göttingische gelehrte Anzeigen*. Stück 33 vom 26. Februar 1821, S. 321-327; ebenfalls S. 97 in C.F. Gauss: *Carl Friedrich Gauss Werke*, Band 4, Göttingen 1880, Neudruck Hildesheim 1973; S. 192 in C.F. Gauss: *Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate*, in deutscher Sprache hg. von A. Börsch und P. Simon, Berlin 1887, Neudrucke Würzburg 1964, Vaduz 1998.

Anmerkung 7. Zu Einzelfragen sei auf Folgearbeiten verwiesen: Report 414 zu den Vertretungsgewichten der Mandate [*Kritische Vierteljahresschrift für Gesetzgebung und Rechtswissenschaft* 83 (2000) 76-103; [html=290kB](#)], Report 421 (mit A.W. Marshall, I. Olkin) zum Majorisierungsvergleich von Divisormethoden [*Social Choice and Welfare* 19 (2002) 885-900; [pdf=140kB](#)], Report 422 zu den Idealansprüchen der Parteien [*Zeitschrift für Politik* 47 (2000) 239-273; [html=520kB](#)], [Report 423](#) (mit N.R. Draper, M. Drton und K. Schuster) zur Verzerrtheit und Unverzerrtheit von Mandatszahlen.

[Zurück zum Anfang](#)